Liceul Tehnologic Energetic "Elie Radu", Ploieşti

ELIE RADU (1853-1931)
Pedagog, academician şi inginer român

Concursul de Matematică "Elie Radu"
ediţia a XVI-a, Ploieşti, 07.12.2024 , **clasa a XII-a**

SUBIECTUL I (60p)

Pentru problemele 1)-6) alegeţi varianta corectă de răspuns:

1) (10p) Pe intervalul $(0,\infty)$ definim legea de compoziţie $x\circ y=\frac{x^2+y^2}{x+y}$.
Numărul soluţiilor întregi din intervalul $(0,\infty)$ pe care le are inecuaţia $x\circ(x+1)\le 2$ este:
a) două ; **b)** una ; **c)** niciuna ; **d)** o infinitate ; **e)** alt răspuns

2) (10p) Pe intervalul $(0,\infty)$ definim legea de compoziţie $x\circ y=\sqrt{\frac{1}{xy}}$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată ?
a) $\exists\ a\in(0,\infty)$ astfel încât $x\circ a=a, \forall\ x\in(0,\infty)$; **b)** legea are element neutru
c) legea **nu** e comutativă ; **d)** legea **nu** e asociativă
e) intervalul $(0,1)$ este parte stabilă a lui $(0,\infty)$ în raport cu legea dată

3) (10p) Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie asociativă $x\circ y=2024(xy-x-y)+2025$.
Mulţimea elementelor din $\mathbb{R}$ care au simetricele egale cu opusele lor este formată din :
a) un element ; **b)** două elemente ; **c)** niciun element ; **d)** o infinitate de elemente ; **e)** patru elemente

4) (10p) Numărul real $a>1$ pentru care : $\int_1^a \frac{1}{x\sqrt{x}}dx=2-a$, are valoarea :
a) $\sqrt[3]{3}$; **b)** 2 ; **c)** 3 ; **d)** $\sqrt[3]{4}$; **e)** $\frac{3}{2}$

5) (10p) Se consideră funcţia $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$. Primitiva $F:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f al cărei grafic trece prin punctul $A\left(-1,-\frac{ln2}{2}\right)$ are legea:
a) $F(x)=ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+1$; **b)** $F(x)=ln\left(\frac{-2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+\frac{1}{2}$; **c)** $F(x)=ln\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$; **d)** $F(x)=\frac{1}{2}ln\left(\frac{-x}{x^2+1}\right)$
e) $F(x)=ln\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\right)-1$

6) (10p) Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2lnx$. Dacă f este o primitivă a funcţiei $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, atunci legea funcţiei g este:
a) $g(x)=4xlnx$; **b)** $g(x)=2x(2lnx-1)$; **c)** $g(x)=\frac{2}{3}x^3\left(lnx-\frac{1}{3}\right)$; **d)** $g(x)=2x(2lnx+1)$
e) alt răspuns

SUBIECTUL II (30p)

Pentru problemele 1)-2) se cer rezolvările complete:

1) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^4+4}$.
a) (7p) Determinaţi numărul real $a>0$ ştiind că $\int_0^a f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{\pi}{8}$.
b) (8p) Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este o funcţie convexă pe intervalul $(-\infty,0)$.
2) Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi mulţimea $K=\{aI_2+bA\ /\ a,b\in\mathbb{Q}\}$.
a) (7p) Demonstraţi că mulţimea K este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.
b) (8p) Demonstraţi că orice element din $K\setminus\{O_2\}$ este simetrizabil faţă de înmulţirea matricelor.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii. La subiectul I, fiecare problemă are un singur răspuns corect. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru 2 ore şi 30 minute. ***Succes!***